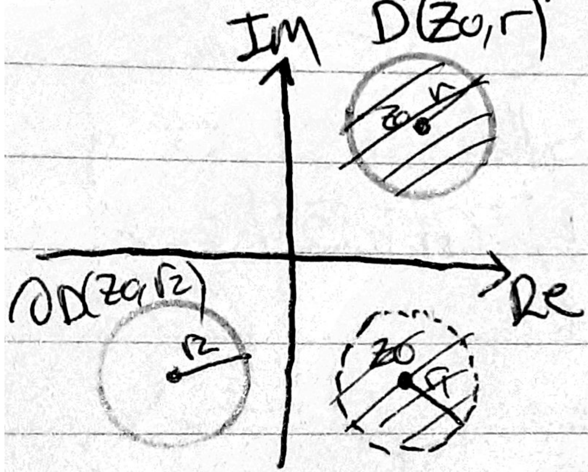
Μάθημα 8ο 16/03/2018

Τοπολογικές Ιδιότητες (τοπολογία του $\mathbb{C}$ = Τοπολογία του $\mathbb{R}^2$)

Π.χ. Θα λέμε ότι το $D(z_0,r) := \{z\in\mathbb{C} : |z-z_0|<r\}$, $r>0$, $z_0\in\mathbb{C}$



ανοικτός κυκλικός δίσκος κέντρου z_0, ακτίνας r.

$\overline{D}(z_0,r) := \{\ldots \leq r\}$, κλειστός κυκλικός δίσκος

$\partial D(z_0,r) := \{\ldots = r\}$, κύκλος κέντρου z_0, ακτίνας r.

$(z_n) \subset \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$

$$z_n \to z :\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0 : |z_n - z|<\varepsilon$$

$$\left[\ z = \lim_{n\to\infty} z_n \ \text{(είναι μοναδικό ΑΝ ΥΠΑΡΧΕΙ)}\ \right]$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0 : \boxed{z_n \in D(z,\varepsilon)}$$

$$z_n \to z \Leftrightarrow z_n - z \to 0 \Leftrightarrow |z_n - z| \to 0$$

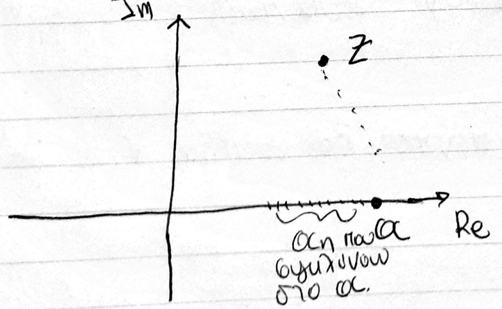
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η σύγκλιση στο $\mathbb{C}$ είναι συμβατή με τη σύγκλιση στο $\mathbb{R}$
(επέκταση της σύγκλισης στο $\mathbb{R}$)

Δηλαδή, αν έχω μια $(a_n)\subset\mathbb{R}$ με $a_n \to a \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon$

Τότε μπορώ να πω ότι τα $(a_n, 0) \in \mathbb{R}^2$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a_n + i0)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$ ισχύει $a_n + i0 \longrightarrow a + i0 \in \mathbb{C}$



$$\underbrace{|a_n - a|}_{=} < \varepsilon$$
$$\|(a_n - a) + i0\|$$
$$= \|(a_n - a, 0)\|$$

(*) Αν έχω μια συγκλίνουσα ακολουθία στο $\mathbb{R}$, μπορώ να πω ότι συγκλίνει και στο $\mathbb{C}$. (*)

Οπότε: $z_n = \mathrm{Re} z_n + i\, \mathrm{Im} z_n = (\mathrm{Re} z_n, \mathrm{Im} z_n) \longrightarrow z = \mathrm{Re} z + i\, \mathrm{Im} z =$

$$= (\mathrm{Re} z, \mathrm{Im} z)$$

$(z_n) \subset \mathbb{C}$ και z_n φραγμένη $:\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists R > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : z_n \in D(0, R)$

Η $(z_n) \subset \mathbb{C}$ ονομάζεται ακολουθία Cauchy $:\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq n_0$ να ισχύει $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

Κάθε ακολουθία Cauchy είναι συγκλίνουσα και αντίστροφα $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}$ πλήρης μετρικός χώρος

Άλλες Ιδιότητες

Αν: $(z_n) \subset \mathbb{C}$ συγκλίνουσα $\Rightarrow (z_n)$ φραγμένη

$z_n \longrightarrow z \Rightarrow$ Για $\varepsilon = 1 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ |z_n - z| < 1$

$\Rightarrow |z_n| \leq |z_n - z| + |z| \leq 1 + |z| \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow |z_n| \leq C := \max\{|z_1|, \dots, |z_{n_0}|, 1 + |z|\}$

$z_n \longrightarrow z, \quad w_n \longrightarrow w$

$\Rightarrow z_n + w_n \longrightarrow z + w$ (τριγωνική ανισότητα: $|z_n + w_n - (z + w)|$

$\leq \underbrace{|z_n + w_n|}_{\to 0} + \underbrace{|w_n - w|}_{\to 0} \to 0$

(βλ. ΑΠ III) $|w_n| \to |w| > 0$

$\Leftrightarrow$ τριγ. ανισ. $||w_n| - |w|| \leq |w_n - w| \to 0$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ |w_n| > 0 \Leftrightarrow w_n \neq 0$

$z_n \longrightarrow z, \quad w_n \longrightarrow w, w \neq 0$

$\Rightarrow z_n w_n \longrightarrow z w$

$|z_n w_n - z w| \leq \underbrace{|z_n|}_{\leq C} |w_n - w| + |w| |z_n - z|$

$\leq (C + |w|) \underbrace{(|w_n - w| + |z_n - z|)}_{\longrightarrow 0}$

$z_n \to z,\ \underbrace{w_n \to w,\ w \neq 0}_{\Rightarrow |w_n| \to |w| > 0} \Rightarrow \frac{z_n}{w_n} \to \frac{z}{w}$

$$\left|\frac{z_n}{w_n} - \frac{z}{w}\right| = \frac{|z_n w - w_n z|}{|w_n||w|}$$

$$= \frac{z_n w - z_n w_n + z_n w_n - z w_n}{|w_n||w|}$$

$$\leq \frac{|z_n(w-w_n)| + |(z_n - z)w_n|}{|w_n||w|} =$$

$$= \frac{\overbrace{|z_n|}^{\leq c_1}|w-w_n| + |z_n - z|\overbrace{|w_n|}^{\leq c_2}}{|w_n||w|}$$

$$\leq \frac{\overbrace{(c_1+c_2)}^{\in \mathbb{R}}\overbrace{(w-w_n)}^{\in \mathbb{R}} + \overbrace{(z-z_n)}^{\in \mathbb{R}}}{\underbrace{|w_n||w|}_{\in \mathbb{R}}}$$

$\Rightarrow \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : ||w_n| - |w|| < \frac{|w|}{2} > 0$

$\Leftrightarrow 0 < \frac{|w|}{2} < |w_n| < \frac{3|w|}{2}$

και άρα (συνεπώς)

$$\frac{1}{|w_n|} < \frac{2}{|w|}$$

$$\Rightarrow \frac{(c_1+c_2)(|z_n - z| + |w_n - w|)}{|w_n||w|} \leq \frac{2(c_1+c_2)}{|w|^2}(|z_n - z| + |w_n - w|) \to 0$$

ΟΤΙ ΞΕΡΟΥΜΕ ΓΙΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕ (ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΔ.).

π.χ. $\begin{cases} \alpha^n \to 0 \text{ για } \alpha \in (-1,1) \iff |a|<1 \\ \sqrt[n]{a} \to 1 \text{ , } \alpha>0 \\ \sqrt[n]{\alpha} \to 1 \end{cases}$

Από αυτά προκύπτουν:

SUPER-SOS

$z^n \to 0$ για $z \in D(0,1)$

Αποδ.

$z^n \to 0 \iff |z|^n \to 0$

Το οποίο ισχύει αφού ($z \in D(0,1) \iff |z|<1$)

Επίσης, π.χ. Εξετάστε αν συγκλίνει η:

$z_n = \sqrt[n]{n} + i\sqrt[n]{2}$.

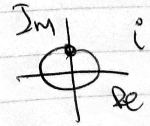
ΛΥΣΗ.

Θυδο: $\underset{x_n+iy_n}{z_n} \to \underset{x+yi}{z} \iff x_n \to x \wedge y_n \to y$

$\Rightarrow z_n = \sqrt[n]{2} + i\sqrt[n]{2} \longrightarrow 1+i$

Π.χ. (i^n) συγκλίνει? ΟΧΙ.

$i^n = e^{\frac{in\pi}{2}} \overset{euler}{=} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1, & n=4k \\ i, & n=4k+1 \\ -1, & n=4k+2 \\ -i, & n=4k+3 \end{cases}$



$i = \underbrace{|i|}_{=1} e^{i\underbrace{Arg\, i}_{=\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

Άρα το $\left.\begin{array}{l} i^{4k} = 1 \longrightarrow 1 \text{ για } k \to \infty \\ i^{4k+1} = i \longrightarrow i \text{ για } k \to \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow$

$\Rightarrow$ η (i^n) <u>ΔΕΝ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ</u>

Χρησιμοποιούμε εδώ ότι: $z_n \to z \Rightarrow z_{k_n} \to z$

$\forall$ υπακολουθία $(z_{k_n}) \subset (z_n)$

δείκτες υπακολουθίας $k_1 < k_2 < \dots$

$k_n \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $k_n \geq n$

Ερώτηση: $\left(\frac{i^n}{n}\right)$ συγκλίνει ??

$\exists z \in \mathbb{C} : \left|\frac{i^n}{n} - z\right| \longrightarrow 0$??

<u>Δοκιμάζουμε</u> για $z=0$: $\left|\frac{i^n}{n} - 0\right| = \left|\frac{i^n}{n}\right| =$

$$= \frac{|i^n|}{n} = \frac{|i|^n}{n} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

<u>Άσκηση</u>

i) $$\frac{(2-3i)\sqrt{n} + i\sqrt[3]{n} + \sqrt{n}}{(3+i)\sqrt[4]{n^2+n+1} + (1+i)\sqrt[3]{n} + 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} ??$$

ii) $\dfrac{(1-i)n + i(\sqrt{n}) + 1}{(2+i)n + (1+i)\sqrt[3]{n} + 5} \xrightarrow[n\to\infty]{} ??$

iii) $\dfrac{(2+i)^{n+1}}{(3-i)^{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} ??$

⊛ Είδαμε την προηγούμενη εβδομάδα:

$z = |z| e^{i \underset{\sim}{Arg z}}, \quad z \neq 0$

το σύνολο όλων των ορισμάτων του z είναι:

$\arg z = \underbrace{Arg z}_{\in(-\pi,\pi]} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$z = |z| e^{i\arg z} = |z| e^{i(Arg z + 2k\pi)} = |z| e^{i Arg z}$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>:

Λέμε μια ακολουθία $(z_n) \subset \mathbb{C}$ τείνει (ή συγκλίνει) στο άπειρο (converges), $\boxed{z_n \longrightarrow \infty}$

$\boxed{:\Leftrightarrow \forall r > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |z_n| > r}$

$z_n \longrightarrow \infty :\Leftrightarrow \forall r > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |z_n| > r$

[παρατηρούμε ότι το όρισμα του z_n δεν παίζει κανένα ρόλο]

$\Leftrightarrow |z_n| \longrightarrow +\infty$ (στο $\mathbb{R}$)

$\underset{z_n \neq 0}{\Leftrightarrow} \dfrac{1}{|z_n|} \longrightarrow 0$ (+).

Άσκηση: Δ.Ο: $|Re z_n| \to +\infty$ ή $|Im z| \to +\infty$.

$\Longrightarrow z_n \to \infty$

Π.χ. $\frac{1}{n} + i\sqrt{n} \to \infty \overset{\text{ορ.}}{\iff} \underbrace{\left|\frac{1}{n} + i\sqrt{n}\right|}_{=} \to +\infty$

$= \left|\frac{1+in\sqrt{n}}{n}\right| = \frac{\sqrt{1+n^3}}{n} = \sqrt{\frac{1}{n^2}+n} \underset{\forall n \in \mathbb{N}}{>} \sqrt{n} \to +\infty$

$\iff \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ επειδή η $f(x) = x^{\alpha}$ για $\alpha > 0$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$
$x > 0$

Π.χ. Η ακολουθία: $\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} - (-1)^n i \underbrace{\sqrt[3]{n}}_{\to +\infty} \to \infty$

αφού $|z_n| \underset{\text{ορ}}{=} \sqrt{(Re z_n)^2 + (Im z_n)^2} \underset{(*)}{\geq} |Re z_n|, |Im z_n|$

και άρα: (Λύση της προηγούμενης άσκησης: Αν π.χ. $|Re z_n| \to +\infty \underset{\text{ορ.}}{\iff} \forall r > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 : |Re z_n| > r$

$\underset{(*)}{\Longrightarrow}$ —— // —— $: |z_n| > r \underset{\text{ορ.}}{\iff} z_n \to \infty$)

και άρα εδώ έχουμε: $|Im z_n| = |(-1)^n \sqrt[3]{n}| =$

$= \sqrt[3]{n} \to +\infty \quad \left(\iff \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \to 0\right)$

Άσκηση Δ.Ο.:

α) $(-1)^n \sqrt[n]{n} - i^{n}\sqrt[3]{n} \longrightarrow \infty$

β) $\forall\, z \in \mathbb{C}$ με $|z|>1 \Rightarrow z^n \longrightarrow \infty$

Άσκηση α) $z \in D(0,1)$ και $z_n \longrightarrow z \Rightarrow z_n^n \longrightarrow 0$

β) Υπολογίστε αν υπάρχουν τα όρια:

$$\frac{(1+i)^n}{\sqrt{2^n}}, \quad \left(\frac{n+i}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n + i\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^n}\right)^n$$

γ) Σωστό ή Λάθος ?

$\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\quad \sqrt[n]{z} \longrightarrow 1$, $\quad n\,\mathrm{Im}\sqrt[n]{z} \longrightarrow \mathrm{Arg}\, z$,

$n(\sqrt[n]{z} - 1) \longrightarrow \log z$

δ) Εξετάστε αν ισχύει:

$z_n \longrightarrow \infty$ και (w_n) φραγμ. $\Rightarrow z_n + w_n \longrightarrow \infty$.